

# UNE APPROCHE ÉLASTOPLASTIQUE DU COMPORTEMENT DES STRUCTURES ANNULAIRES EN BÉTON.

**Khalfallah S\*, Benouata S.\***

\* B.P 98, Ouled Aïssa, Département de génie civil, Université de Jijel, 18000 Jijel.

e-mail : khalfallah\_s@yahoo.com

## Résumé

La projection d'un Système Eléments Finis (SEF) à l'analyse non linéaire des structures en béton est présentée. Une procédure incrémentale-itérative est utilisée pour prédire la solution non linéaire et la dégradation matérielle des structures circulaires. Ce travail consiste en l'analyse jusqu'à la ruine des buses en béton et le diffus de dégradation mécanique due à l'effet de plasticité. Le modèle de comportement élastoplastique est retenu et incorporé dans un programme numérique en vu d'analyser en état plan de déformations la réponse des buses en béton. Enfin, les résultats numériques obtenus par la présente simulation montre une concordance satisfaisante avec les résultats cités en littérature.

**Mots-clés :** Plasticité, Analyse incrémentale-itérative, Analyse non linéaire, Déformation plastique, Etat plan de déformations, Structures, Buses en béton.

## 1. Introduction

La méthode des éléments finis est devenue un outil très puissant d'analyse en mécanique des structures. A ce moment là, elle est largement utilisée pour représenter le comportement des structures sous chargements complexes : monotone et ou cyclique. Pour sa facilité et la qualité de ses résultats numériques, elle occupe actuellement plusieurs domaines de recherche, mécanique, électromécanique, électricité, aéronautique. Récemment, le développement des capacités de mémoire des computers a permis à des analyses de structures en prenant en considération simultanément des non linéarités géométrique et matérielle (ASCE, 1982), (ACI, 1997), [Zienkiewicz, 2000].

Al-Ta'an et Ezzadeen (1995) ont développé un procédé numérique basé sur la méthode des éléments finis à l'analyse non linéaire géométrique et matérielle des membres en béton armé. Pour l'analyse non linéaire, une technique incrémentale-itérative basée sur la méthode de Newton-Raphson a été utilisée (Khalfallah, 2003). Dans cette étude, seuls les composants de déplacement ont été considérés comme degrés de liberté du système.

L'analyse non linéaire par SEF peut éliminer l'inconsistance qui existe dans la procédure de conception entre la distribution de forces internes déterminées par une analyse linéaire et le comportement non linéaire. La redistribution des forces de déséquilibre est tenue en considération provoquant des déformations supplémentaires et par conséquent une réponse non linéaire (Khalfallah, 2001).

Une application pratique à des buses en béton soumises à une pression hydrostatique, est sélectionnée pour tester la performance du SEF développé au sein du projet de recherche porté sur la " Modélisation du Comportement Non Linéaire des Structures en Béton Armé". Ce programme numérique couvre de façon générale les caractéristiques mécaniques principales des bétons et béton armé au cours de leurs changements rhéologiques. Le concept de plasticité permet à utiliser la technique SEF standard, bien connue à partir de l'analyse élastique linéaire et à son extension dans le domaine de comportement non linéaire jusqu'à la rupture.

## 2. Modélisation matérielle

Le programme développé conçu à l'analyse des structures planes permet de suivre la réponse de la structure étudiée sous un chargement monotone jusqu'à la ruine. Le modèle physique des bétons introduit dans le programme est supposé élastoplastique en compression biaxiale tandis que l'effet dû à la traction est négligé. Pour régulariser cette supposition, la contrainte de traction qui se produit se transforme en forces internes provoquant de leur part un champ de déplacement supplémentaire (Khalfallah, 2004).

Dans une analyse non linéaire, la charge extérieure est appliquée de façon incrémentale et pour les chargements plus faibles, le comportement des bétons est supposé homogène et isotrope. Le problème consiste à identifier un champ de déplacements  $u$  qui satisfait aux conditions d'équilibre et de compatibilité suivantes (figure 1):

$$\sigma_{ij} + f_j = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1)$$

$$\sigma_{ji} n_j = \bar{t}_i \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (2)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{sur } \Gamma_2 \text{ et } \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (3)$$

avec la relation cinématique:

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (4)$$

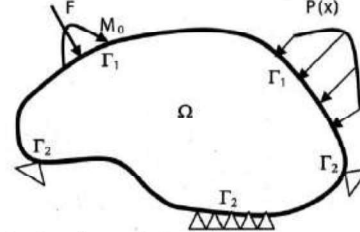


Figure 1-Etat du problème.

Pour une élasticité isotrope :

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (5)$$

$$ou D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (6)$$

et  $\lambda$ ,  $\mu$  sont les constantes de Lamé.

### 2.1 La Modélisation élastoplastique

La plupart des matériaux présentent un comportement de type élastoplastique ou parfois élastique parfaitement plastique pour quelques matériaux ayant des caractéristiques spécifiques. Dans ce stade de comportement, les déformations sont considérées irréversibles et que les déformations permanentes ont été observées après un déchargement du matériau. La modélisation du comportement des matériaux dans le cadre de la théorie de plasticité nécessite la définition des paramètres suivants :

1- La déformation totale peut être décomposée en une partie élastique et une autre plastique.

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (7)$$

Dans la théorie de plasticité, les équations constitutives s'écrivent alors :

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl} \quad (8)$$

où  $D_{ijkl}^{ep}$  est la matrice de rigidité élastoplastique du béton.

2- A tout modèle élastoplastique est associé un critère de plasticité qui délimite le domaine initial de plasticité. Pour des points aux valeurs de contraintes qui se situent à l'intérieur de la surface d'écoulement initial, le comportement du matériau est considéré élastique linéaire. Si ce point atteint la surface d'écoulement ou il la dépasse, il est obligé de la rendre sur la surface d'écoulement actuel (condition de consistance). Dans le cas particulier élastique parfaitement plastique- cette condition peut être exprimée sous la forme suivante :

$$f(\sigma) = 0 \quad (9)$$

3- La règle d'écoulement exprime la direction du vecteur déformation plastique.

$$d\varepsilon^p = d\gamma \cdot r(\sigma) \quad (10)$$

$d\gamma$  est appelé le multiplicateur plastique et il se détermine à partir de la condition de consistance, son expression est donnée par l'expression :

$$d\gamma = \frac{r \cdot D_{ijkl} \cdot d\varepsilon}{r \cdot D_{ijkl} \cdot r} \quad (11)$$

où  $r(\sigma)$  est le vecteur d'écoulement, sa relation dans le cas d'une plasticité associée, est :

$$r(\sigma) = \frac{df}{d\sigma} \quad (12)$$

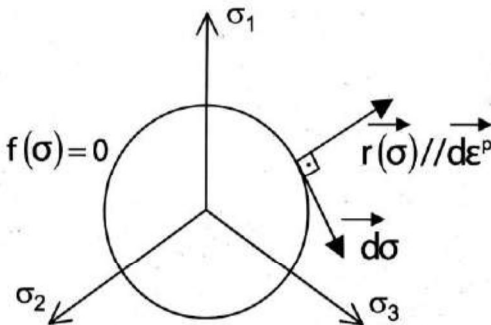


**Figure 2- Surface d'écoulement dans le plan déviatorique**

Comme résultat relatif à la règle d'écoulement plastique les vecteurs  $d\varepsilon^p$  et  $d\sigma$  ne sont pas colinéaires qui n'est pas pareil au cas à comportement élastique.

4- L'amplitude actuelle de l'écoulement plastique résulte de la condition de consistance qui impose :

$$d\gamma \geq 0 \quad f \leq 0 \quad d\gamma \cdot f = 0 \quad (13)$$

Dans le domaine de comportement élastoplastique, la relation précédente s'écrit avec une notation vectorielle, par:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial k} dk = \frac{\partial f}{\partial k} D_{ijkl} (d\varepsilon - d\varepsilon^p) + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0 \quad (14)$$

Dans ce cas, la loi constitutive élastoplastique s'exprime par :

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{ep} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \quad (15)$$

5- Le critère de rupture utilisé est celui de Von Misès, la surface d'écoulement plastique est supposée atteinte lorsque le second invariant déviatorique  $J_2$  du tenseur de contraintes atteint la valeur

critique  $k_2$ , qui est une propriété matérielle. Ce critère est largement appliqué pour les métaux et son expression est donnée par :

$$f(\sigma) = \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (16)$$

dont l'expression de  $J_2$  peut être calculée

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad (17)$$

On peut exprimer le critère en fonction du rayon du cylindre:

$$R = \sqrt{2}k \quad (18)$$

La représentation géométrique du critère de rupture de Von Misès dans l'espace de contraintes et dans le plan déviatorique se projette comme suit :

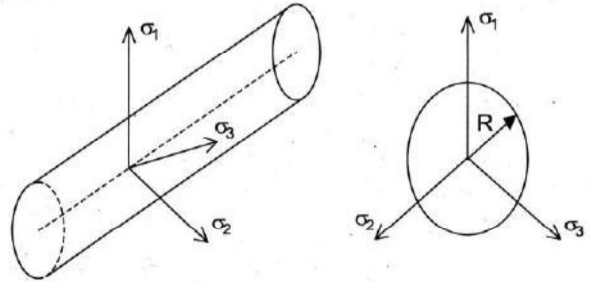


**Figure 3- Critère de Von Misès dans l'espace de contraintes et dans le plan déviatorique.**

Supposons une plasticité associée, on peut déterminer ainsi le vecteur d'écoulement  $r(\sigma)$ :

$$r(\sigma) = \frac{df}{d\sigma} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} s_{ij} \quad (19)$$

6- Dans le cadre de la plasticité parfaite des matériaux, la surface d'écoulement est constante à travers le processus de plasticité. L'écrouissage décrit une loi d'évolution de la surface d'écoulement de cette surface dans l'espace de contraintes.

$$f(\sigma, k) = 0 \quad (20)$$

où  $k$  est le paramètre d'écrouissage qui peut être un scalaire ou un tenseur. Une distinction peut être faite entre un écrouissage isotrope dans lequel la surface d'écoulement grandit uniformément et le centre dans le plan déviatorique est supposé constant. Par contre, le centre de la surface d'écoulement en écrouissage cinématique se translate dans le plan déviatorique et le rayon reste constant.

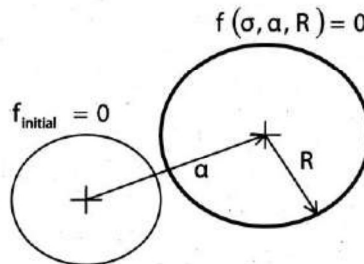


**Figure 4-Evolution de la surface d'écoulement dans le plan déviatorique.**

Dans ce cas, on utilise la contrainte équivalente (effective)  $\sigma_{eq}$  et la déformation plastique équivalente  $\varepsilon_{eq}^p$  [Chen, 1982]:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} = \sqrt{3} J_2 \quad (21)$$

$$\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p} \quad (22)$$

Ceci permettant la vérification du test uniaxial:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3} J_2 = \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2} \sigma_{11}^2} = \sigma_{11} \quad (23)$$

L'incompressibilité dans le domaine plastique conduit à

$$(\varepsilon_{22}^p = \varepsilon_{33}^p = -\frac{1}{2} \varepsilon_{11}^p):$$

$$\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \left[ (\varepsilon_{11}^p)^2 + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{11}^p\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{11}^p\right)^2 \right]} = \varepsilon_{11} \quad (24)$$

Pour le test uniaxial, les équations (23) et (24) montrent que les définitions de la contrainte équivalente et de la déformation équivalente plastique sont cohérentes. Dans le cas d'écrouissage linéaire, la relation entre les deux variables peut être exprimée en faisant recours au module plastique  $H'$ .

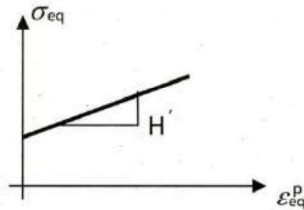


Figure 5- Module d'écrouissage

$$d\sigma_{eq} = H' d\varepsilon_{eq}^p \quad (25)$$

Auquel  $H' \geq 0$ .

Dans cette étude, un écrouissage isotrope est considéré.

La norme de l'incrément de la déformation plastique est donnée par définition par le multiplicateur plastique. Le cas particulier d'un problème unidimensionnel, il est admis d'écrire :

$$|d\varepsilon_p| = \sqrt{\left[(d\varepsilon_1)^2 + \left(\frac{1}{2}d\varepsilon_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d\varepsilon_1\right)^2\right]} = \sqrt{\frac{3}{2}} d\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} d\varepsilon_{eq}^p = d\gamma \quad (26)$$

Selon le critère de Von Mises, l'équation (16) conduit à l'expression suivante:

$$dk = d\sqrt{J_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} d\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{3}} H' d\varepsilon_{eq}^p = \frac{\sqrt{2}}{3} H' d\gamma \quad (27)$$

En utilisant l'équation (18), l'expression d'évolution de l'écoulement plastique est :

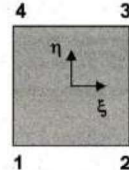
$$dR = \sqrt{2} dk = \frac{2}{3} H' d\gamma \quad (28)$$

### 3. La formulation numérique

L'application des approximations sur le champ de déplacements  $u$ , permet d'écrire la relation suivante:

$$u(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) q_a \quad (29)$$

où  $q_a$  est le vecteur de degrés de liberté et  $N_i$  est la fonction d'interpolation au nœud d'indice  $i$ . Les fonctions d'interpolation  $N_i$  pour un élément bilinéaire à 4 nœuds sont données comme suit :



$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (30)$$

Figure 6-Fonctions d'Interpolation de l'élément isoparamétrique.

Après discrétisation, le principe des travaux virtuels conduit à l'écriture sous la forme suivante d'un système d'équations algébriques linéaires

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (31)$$

$\mathbf{K}$  et  $\mathbf{F}$  sont respectivement la matrice de rigidité et le vecteur forces appliquées évalué dans le système d'axes global. La matrice de rigidité peut prendre la matrice Dijkl si le comportement du matériau est à l'intérieur de la surface initiale d'écoulement, le cas contraire, la matrice  $\mathbf{K}$  est substituée par :

$$[\mathbf{D}_{ijkl}^{ep}] = [\mathbf{D}_{ijkl}] - \frac{[\mathbf{D}_{ijkl}] \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \{\sigma\}} \right\} \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [\mathbf{D}_{ijkl}]}{-A + \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [\mathbf{D}_{ijkl}] \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \{\sigma\}} \right\}} \quad (32)$$

## 4. Applications numériques

### 4.1 Le test élémentaire en contraintes planes

Pour valider le programme développé, le test élémentaire composé d'un seul élément fini est considéré. Les conditions aux limites et le chargement appliqué sont montrés sur la figure (7). Dans ce cas, le facteur d'écrouissage  $k=1$  est considéré.

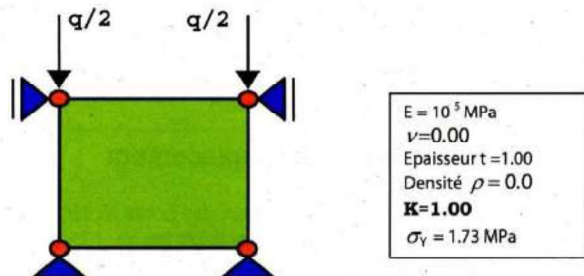


Figure 7-Test de base

#### 4.1.1 La méthode analytique

L'état de contrainte  $\sigma$  à l'intérieur de l'élément peut être comme la charge  $q$  augmente telle que :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

où  $\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = 0$  ( $\nu=0$ ) et  $\sigma_{yy} = -q$  le tenseur  $\mathbf{S}$  des contraintes déviatorique s'écrit :

$$s = \begin{bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{xy} \\ s_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q/3 \\ -2q/3 \\ 0 \\ q/3 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Le second invariant des contraintes déviatoriques  $J_2$  s'exprime:

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{6q^2}{9} \right] = \frac{q^2}{3} \quad (35)$$

Dans le même contexte, le critère de Von Mises permet d'évaluer la charge de plastification  $q_y$  par :

$$\sqrt{J_2} - k = 0 \Rightarrow q_y = \sqrt{3}k \quad (36)$$

Dans ce cas,  $k = 1.0$ , la charge de plastification  $q_y$  égale à 1.73.

#### 4.1.2 La méthode numérique

Les paramètres de la résolution non linéaire exigent que la procédure de Newton Raphson soit impérativement utilisée avec un nombre maximum d'itérations égal à 100 et une tolérance de convergence égale à 1. De même, les paramètres matériels suivant le critère de Von Mises sont utilisés avec les mêmes valeurs illustrées ci-dessus (Figure 7).

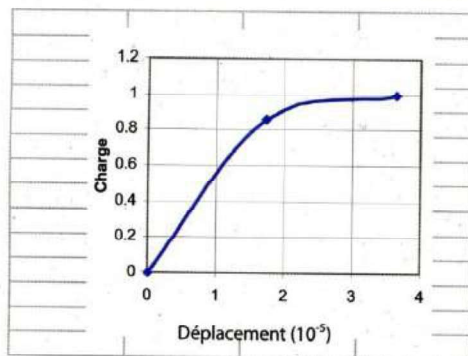


Figure 8- Charge-déplacement

L'analyse non linéaire présente aux niveaux des points d'intégration, la réponse reste toujours élastique pour toute charge  $q = 1.72$  tandis que la plastification matérielle est atteinte à une charge  $q = 1.74$  qui confirme la solution théorique présentée dans la section ci-dessus.

#### 4.2 Test du cylindre épais en déformations planes

Le test du cylindre épais (figure 9) fait l'objet de plusieurs travaux scientifiques dont la solution analytique est donnée par Hill (extrait Hinton, 1977) (Gao et al., 2002).

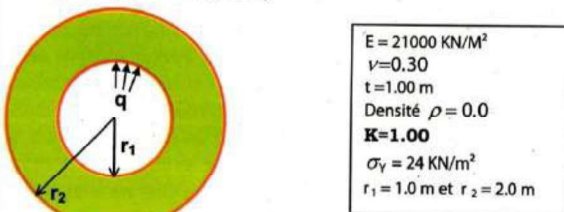


Figure 9- Géométrie et caractéristiques du cylindre épais.

Pour comparer la performance du programme développé à des analyses bidimensionnelles, le test du cylindre épais est choisi avec un maillage modéré de 48 éléments comme le montre la figure (10).

Le critère de Von-Mises est utilisé avec une contrainte d'écoulement du matériau  $\sigma_y = 24 \text{ KN/m}^2$  qui correspond à un paramètre d'écrouissage  $k = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} = 13.8564 \text{ KN/m}^2$ .

La pression interne est appliquée de façon incrémentale à une valeur égale à 20  $\text{KN/m}^2$ . Cette valeur correspond à la plastification totale du matériau et par conséquent à sa rupture.

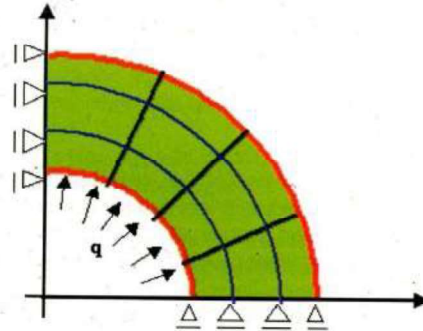


Figure 10- Discrétisation en éléments finis du quart du test.

La figure (11) montre l'évolution de la pression interne-déplacement maximum. Les résultats obtenus par le programme développé en faisant recours au module de la non linéarité matérielle montrent une bonne performance vis à vis les données expérimentales.

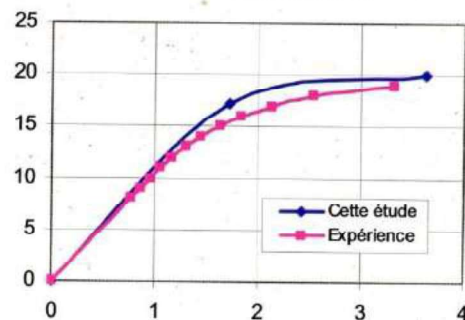


Figure 11- Pression interne -déplacement maximum.

#### 4.3 Buses en béton en déformations planes

L'approche présentée ci-dessus est appliquée cette fois-ci à un cas pratique avec des caractéristiques réelles. Il s'agit d'un béton caractérisé par un module de Young  $E = 21000 \text{ MPa}$ , un coefficient de Poisson  $\nu = 0.20$  et une contrainte limite en compression de 24 MPa. La buse de rayon interne  $a = 0.5 \text{ m}$  et un rayon externe  $b = 0.60 \text{ m}$ . Elle est soumise à une pression interne monotone jusqu'à  $P = 1930 \text{ MPa}$ , valeur qui correspond à une plastification complète du matériau.

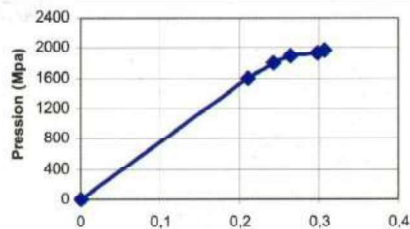


Figure 12- Déplacement radial - pression maximale

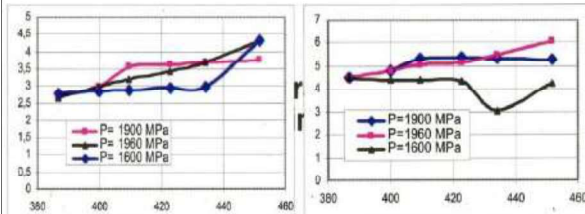


Figure 13- La contrainte radiale et la contrainte circonférentielle

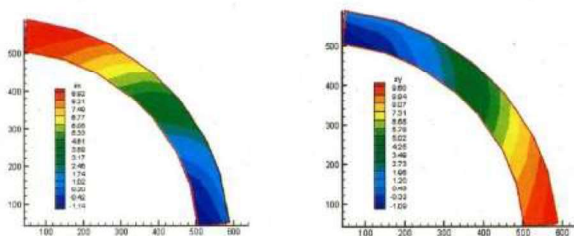


Figure 14- Distribution des contraintes radiale et circonférentielle à P=1960 MPa

La figure 13 présente l'évolution des contraintes radiales et circonférentielles pour des valeurs différentes de la pression interne. Lorsque la pression augmente cette figure montre une réciprocity de l'effet de la pression interne sur les contraintes radiale et circonférentielle (figure 14). La contrainte radiale est effective dans la zone à angle important et la contrainte circonférentielle est prédominante dans la région opposée. La déformation plastique se répartit sur toute la buse lorsque la pression interne atteinte la valeur  $P=1960$  MPa (figure 15). A ce stade de chargement, la buse se rompt par plastification du matériau. Le diffus de plasticité se répartit proportionnellement de la face interne vers la face externe.

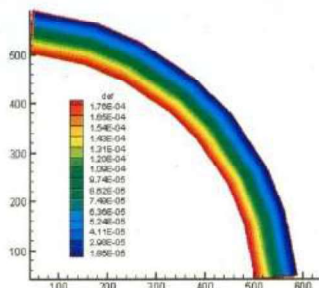


Figure 15-Evolution de la déformation plastique.

## 5- Conclusions

Une approche bi-dimensionnelle qui simule le comportement non linéaire des structures annulaires est présentée. Cette procédure est basée sur la théorie de plasticité dont le phénomène de fissuration du béton est régularisé. La théorie de base et cette régularisation ont été incorporée dans un programme numérique.

Les tests analysés montrent la performance du programme développé dans le domaine de la non linéarité matérielle. En particulier, le cas de buses en béton fait l'objet pratique de cette étude. Il a été montré, dans ces conditions géométriques, que la pression interne limite est de l'ordre de 1960 MPa à laquelle correspond la rupture de la buse par une plastification matérielle. En plus, les contraintes radiales et circonférentielles se répartissent de façon opposée au sein de l'élément et l'endommagement par plastification diminue de la face interne vers la face externe (figure 15).

## 6- Références

ACI Committee, Finite element analysis of fracture in concrete structures: State of the art, ACI Committee 446.3R-97, 1997.

Al-Ta'an, S. A., Ezzadeen, N. A., 1995, Flexural analysis of reinforced fibrous concrete members using the FE method, Computers & Structures, V. 56, N. 6, pp. 1065-1072.

ASCE Task Committee on finite element analysis of reinforced concrete, Finite element analysis of reinforced concrete, ASCE, 1982.

CHEN W.F., Plasticity in reinforced concrete, New York, McGraw-Hill book company, 1982.

Gao X.W., Liua D.D., Chen P.C., Computation Of Internal Stresses In Nonlinear BEM Using A Numerically-Exact Complex-Variable Approach.

Electronic Journal of Boundary Elements, Vol. 3, 2002, pp. 303-310.  
Hinton, E. and Owen, D.R.J., Finite Element Programming, London: Academic press, 1977.

Khalfallah S., CHARIF A., Comportement bidimensionnel des structures sous chargement monotone. Revue Algérie & Equipement, Vol. 37, 2004, pp. 18-23.

Khalfallah S., Modélisation du comportement non linéaire des structures en béton armé sous chargement monotone. Thèse de doctorat, université de Constantine, 2003, 158 p.

Khalfallah S., Charif A., Modélisation 2D par éléments finis du comportement élastoplastique des structures en béton armé. Séminaire International sur la Modélisation Numérique en Structures et Géomatériaux, U. Batna, 2001, pp.124-133.

Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., The Finite Element Method, 5th Edition, London: Butterworth-Heinemann (2000).